

Serie 6 - Aufgaben

Tipps: 10. Mai 2004 / Abgabe: 17. Mai 2004 / Rückgabe: 24. Mai 2004

1 Drehmoment I: Angriffspunkt

Ein stillstehendes Rad soll innerhalb von 20 s auf 1000 Umdrehungen pro Minute beschleunigt werden. Das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse ist $J = 120 \text{ kg m}^2$, der Radius beträgt $R_{\text{Rad}} = 1.10 \text{ m}$, und der Radius der Radachse ist $R_{\text{Achse}} = 5 \text{ cm}$.

- Welche Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi} = \dot{\omega}$ ist erforderlich? Die Beschleunigung soll gleichförmig erfolgen.
- Welches Drehmoment ist hierfür erforderlich?
- Welche Kraft ist folglich nötig, wenn diese Kraft tangential am Rand des Rades angreift (also bei $r = R_{\text{Rad}}$)?
- Wie groß müsste die Kraft sein, wenn sie das Rad stattdessen an dessen Achse antreibt (also bei $r = R_{\text{Achse}}$)?
- Gib für die vier Fälle in Abb. 1 das Drehmoment als Vektor an. Dabei zeige die z-Achse in die Zeichenebene hinein. Rechne allgemein mit einer Kraft F und einem Radius R ; es müssen keine Zahlen eingesetzt werden.

2 Drehmoment II: Gleichgewicht

Wir betrachten ein Brett der Länge ($L = 8 \text{ m}$, Masse $m = 9 \text{ kg}$), welches mit beiden Enden auf je einer Waage aufliegt. Bei $\frac{1}{4}L$ von links liegt ein Bleiklotz der Masse $m_1 = 10 \text{ kg}$ (s. Abb. 2).

- Stelle die Gleichungen für das Gleichgewicht aller angreifenden Kräfte sowie aller Drehmomente auf. (Hinweis: Welche Kräfte kompensieren die nach unten gerichtete Gravitationskraft?)
- Bestimme daraus die Gewichte, die von den Waagen angezeigt werden. Hängen diese von der Länge des Bretts ab?
- Nun wird ein Gewicht von $m_2 = 5 \text{ kg}$ an einer 1 m langen 'masselosen' Schnur $\frac{1}{5}L$ vom rechten Brettende entfernt angehängt. Berechne die Gewichte, die nun von den Waagen angezeigt werden, und beantworte hierfür zuerst die Frage, welche Rolle die Länge der Schnur bei der Rechnung spielt.
- Ein weiteres Gewicht der Masse m_3 soll genau dort auf das Brett gelegt werden, wo das Gewicht m_2 hängt. Wie groß muss m_3 sein, damit beide Waagen das gleiche Gewicht anzeigen?

3 Rollen und Gleiten

Ein Ring mit dem Radius $r = 0.3 \text{ m}$ und der Masse $m = 0.5 \text{ kg}$ (Dicke des Rings vernachlässigbar) rollt, ohne zu gleiten, eine schiefe Ebene hinab, die mit der Waagrechten den Winkel α einschließt. Es soll nun der maximale Neigungswinkel α_{max} bestimmt werden, bei dem der Ring gerade noch ohne dass er zu gleiten beginnt hinabrollt.

- Wenn man den Ring auf die schiefe Ebene setzt und loslässt, beginnt er hinunterzurollen – welche Kraft verursacht das nötige Drehmoment?
- Welche Beziehung besteht zwischen der Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ und der Translationsbeschleunigung a des Rings?
- Schreibe das Drehmoment zunächst in Abhängigkeit von $\ddot{\varphi}$. Welcher bekannten Gleichung entspricht dies bei der Translationsbewegung? Schreibe nun das Drehmoment in Abhängigkeit der Kraft aus a). Finde daraus unter Verwendung von b) die Beziehung zwischen a und dieser Kraft.
- Wie lautet die Formel für die Translationsbeschleunigung a wenn der Ring gleiten würde ohne zu rollen, in Abhängigkeit vom Neigungswinkel α ? Schreibe hier die Reibungskraft mit einem allgemeinen Reibungskoeffizienten μ .
- Soeben wurde *Gleiten* betrachtet, d.h. μ war der *Gleitreibungskoeffizient*. Betrachte nun stattdessen dieselbe Formel mit *Haftreibung*, denn der Ring soll ja eben *nicht* gleiten. Setze diese mit der Formel für a aus c) gleich, und berechne daraus α_{\max} in Abhängigkeit vom Haftreibungskoeffizienten μ_H . Für $\alpha > \alpha_{\max}$ beginnt der Ring zu gleiten.

4 Drehimpuls in der Astronomie

- Die Erde bewegt sich auf einer elliptischen Bahn um die Sonne. Wie verhalten sich die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 an zwei verschiedenen Punkten der Erdbahn als Funktion des Abstands r_1 und r_2 von der Sonne?
- Wir betrachten nun die Sonne (Masse $m_{\odot} = 1.99 \cdot 10^{30}$ kg, Radius $R_{\odot} = 6.96 \cdot 10^8$ m), mit einer Rotationsperiode von 25.4 Tagen. Sie wird an ihrem 'Lebensende' – in etwa 5 Milliarden Jahren – zu einem Weißen Zwerg mit einer Dichte von $\rho_{\text{WZ}} = 10^9$ kg m⁻³. Falls die Sonne bis dahin keinerlei Masse verliert, und sowohl Sonne als auch Weißer Zwerg als homogene Kugeln betrachtet werden können, wie groß ist dann die Rotationsperiode des Weißen Zwergs? (Trägheitsmoment einer homogenen Kugel $J = \frac{2}{5} m R^2$)

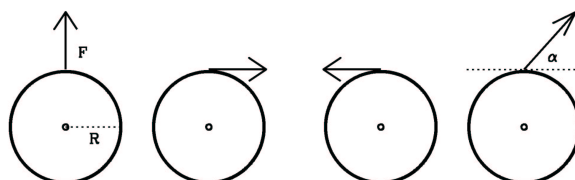


Abbildung 1: Zu Aufgabe 1e

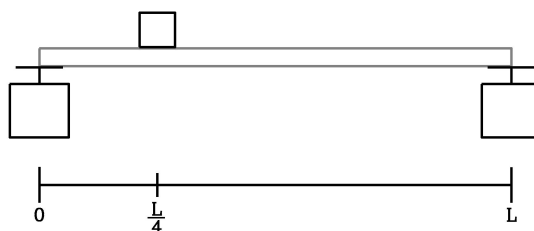


Abbildung 2: Zu Aufgabe 2